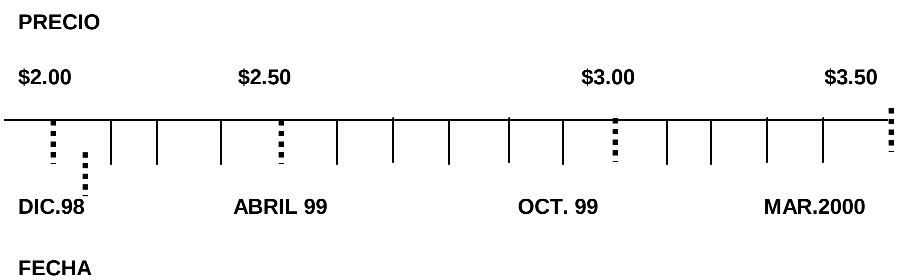
5. INTERÉS COMPUESTO
5.1. Ecuación del monto
5.2. Fecha de vencimiento promedio o equivalente

ECUACIONES DE VALOR

Para poder entender lo que son las ecuaciones de valor, para que nos sirven y cómo entenderlas, es necesario, en primer lugar, entender el comportamiento del dinero a través del tiempo.

Constantemente escuchamos hablar de la inflación, la cual no es otra cosa que un tipo de interés; en efecto, la inflación en realidad es la tasa de interés con la cual el dinero cambia de poder adquisitivo. Esto no significa que a medida que transcurre el tiempo las cosas son más caras, significa que a medida que pasa el tiempo el dinero pierde poder adquisitivo.

Imagínate el precio de unas papas fritas al transcurrir el tiempo, como lo muestra la siguiente gráfica, a la que llamaremos gráfica de tiempo.



Como puedes observar, sigues adquiriendo el mismo producto, pero con diferente cantidad de dinero, de ahí los conceptos del valor actúalo y valor futuro del dinero.

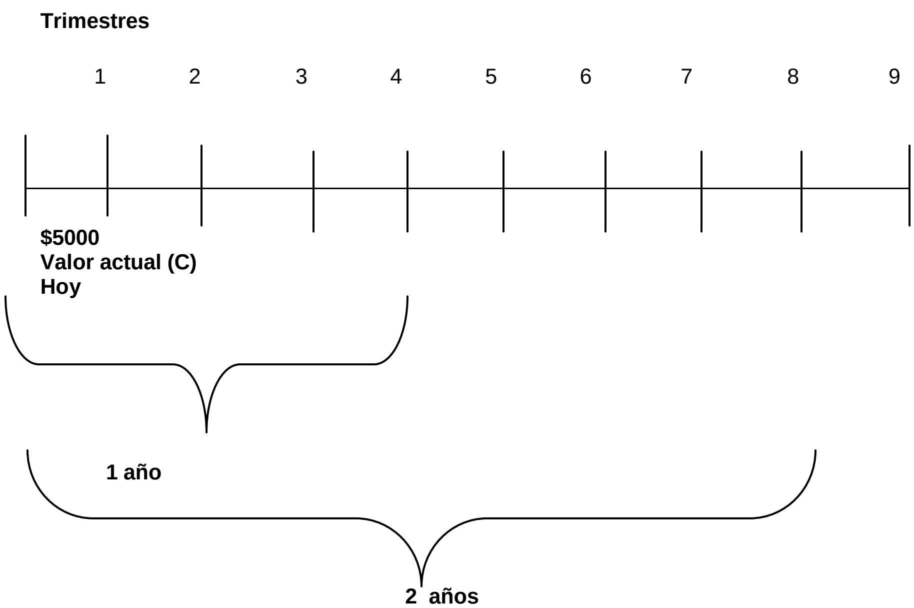
Si te ubicas en la gráfica, en octubre de 1999 los $3.00 son el valor actual en ese momento, mientras que los, mientras que los $3.50 serían el valor futuro en marzo del 2000 para el mismo producto.

Cuando se realiza una gráfica de tiempo, las unidades en que se divide dependerán de las unidades en las que éste dado el interés del cual se hable.

Veamos esto en un ejemplo:

Se desea saber el valor futuro de $500.00 después de dos años, si se sabe que la tasa de interés es de 14% trimestral simple.

Con la tasa de interés está dada por trimestre, la gráfica se traza en las mismas unidades de tiempo es decir, trimestres.



Para encontrar el valor futuro de los $500.00 hay que trasladarlos en el tiempo 8 trimestres más adelante (como se ve en la gráfica); en la definición de monto encontramos que también es llamado valor futuro, y tomando en consideración los datos tenemos (tiempo, capital y tasa de interés), entonces:

$$\boldsymbol{M = C(1 + it)}$$

C=$500

i= 14%= 0.14 trimestral

t= 2 años= 2(4) trimestres= 8 trimestres, ya que cada año tiene 4 trimestres

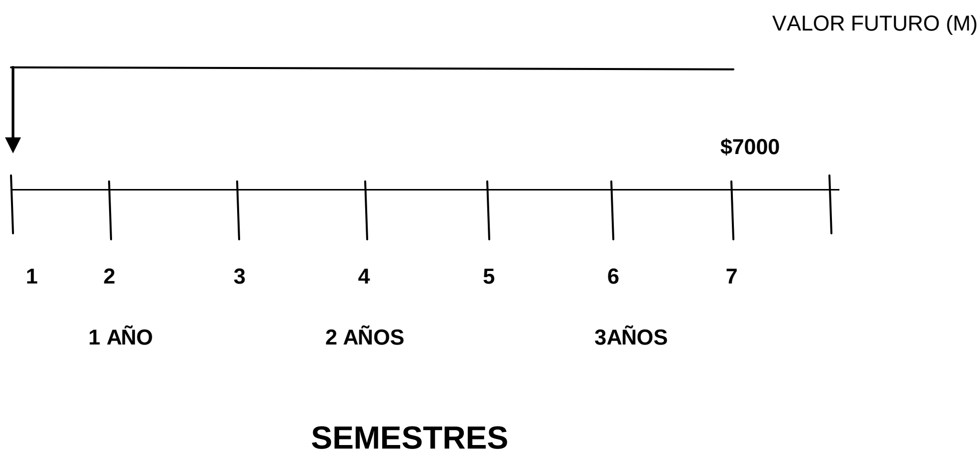
$$M = 500[1 + 0.14(8)] = 500(1 + 1.12) = 1060$$

Significa que el valor futuro en 8 trimestres (2 años) de $500.00 a una tasa del 14% trimestral simple es de $1,060.00

Veamos ahora otro ejemplo para el caso contrario, donde tenemos el valor futuro y deseamos encontrar el valor actual.

¿Cuál es el valor actual de un pagaré de $7000.00, que vence dentro de 3 años, si la tasa de interés es del 18% semestral simple?

Realizamos su gráfica de tiempo, dividida en el mismo tipo de unidades que el interés.



Como se puede apreciar en la gráfica, hay que regresar el dinero en el tiempo 6 semestres para poder encontrar su valor actual, por lo tanto tenemos que despejar el valor actual de la fórmula del monto.

$$M = C(1 + it) \qquad C = \frac{M}{1+it}$$

Los datos son:

M=$7000

i= 18%=0.18

t= 6 semestres (de acuerdo con la gráfica)

Se sustituye:

$$C = \frac{7000}{1 + (0.18)(6)} = \frac{7000}{2.08} = 3,365.38$$

Quiere decir que el valor actual de $7000.00 es de $3,365.38

En la actualidad es frecuente encontrar que las personas tienen más de una deuda, y por diferentes circunstancias deciden pagarla, de una forma diferente a la pactada inicialmente, es decir, se modifican las condiciones iniciales de sus deudas, con otra tasa de interés y otras fechas de pago.

Ejemplo

El Sr. Martínez contrajo las siguientes deudas:

1.- Una primera deuda por $2000.00 pactada a 5 años, con una tasa de interés de 2% simple mensual, que vence hoy.

2.- La segunda es una deuda de $7000.00 a 6 años con una tasa del 15% simple semestral, que vence dentro de 21 meses.

3.- Por la tercera deuda hay que pagar $5000.00 dentro de 3 años y medio.

El Sr Martínez decide renegociar su deuda hay, liquidando con un pago de $10,000.00 dentro de 6 meses y otro de 2 años 6 meses a una tasa del 6% trimestral. ¿De cuánto debe ser dicho pago?

Solución:

PASO 1:

Se debe encontrar el valor de cada deuda en el momento de su vencimiento, para lo cual se utilizará el tiempo al cual fueron pactas.

Primera deuda:

C=$2000.00

i= 2%=0.02 mensual

t= 5(12)=60 meses

$$M = C(1 + it)$$

$$M = 2000(1 + (0.02)(60)) = 2000(2.2) = 4400$$

Segunda deuda

C=$7000

i= 15% = 0.15 semestral

t= 6 años=6(2)=12 semestres

$$M = C(1 + it)$$

$$M = 7000(1 + (0.15)(12)) = 7000(2.8) = 4400$$

Tercera deuda

El enunciado nos dice directamente que el valor de la deuda al momento de su vencimiento es de $5000.00, por lo tanto:

M=5000

Paso 2:

Se traza la gráfica de tiempo, ubicando las deudas y el pago, sin perder de vista que las unidades de la gráfica dependen de la tasa de interés a la que negocia nuevamente la deuda, para este caso trimestres; por lo cual tenemos:

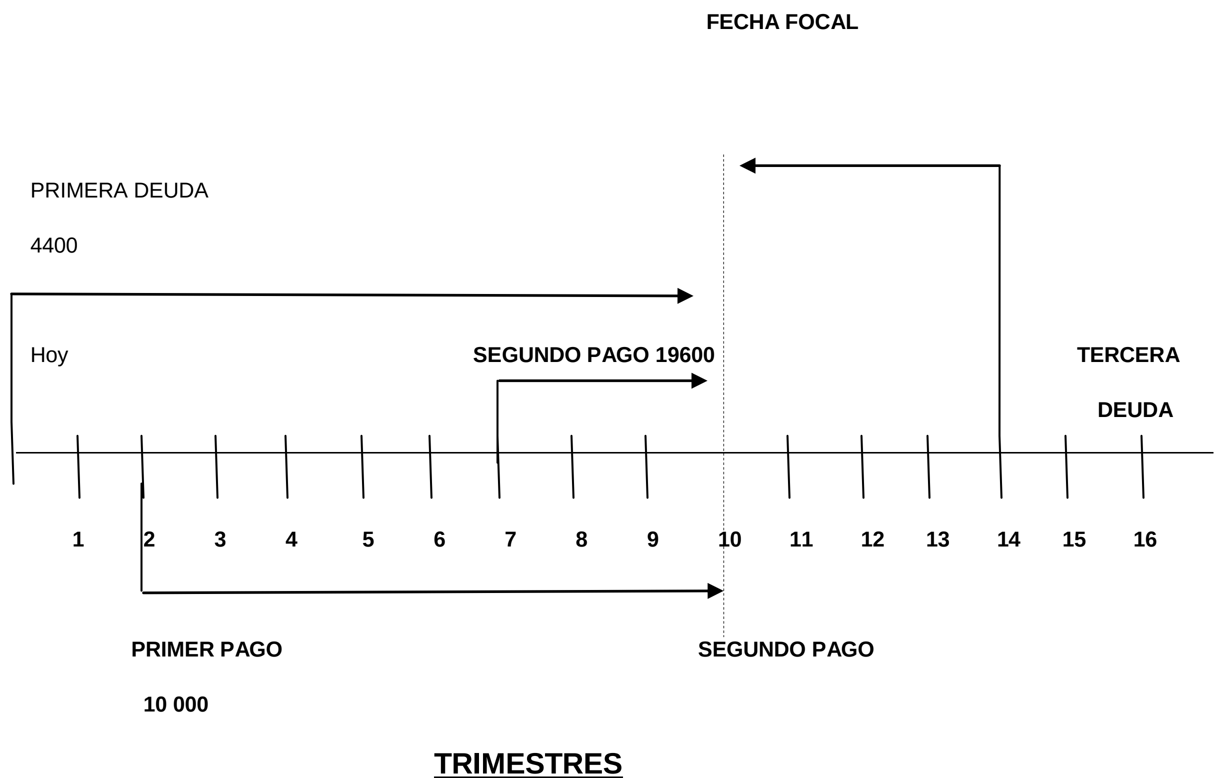
- La primera deuda vence hoy.
- La segunda deuda vence dentro de 21 meses, esto equivale a 7 trimestres.
- La tercera vence dentro de 3 años y medio, lo que equivale a 14 trimestres.
- El primer pago se realiza dentro de seis meses, equivale a 2 trimestres.
- El segundo pago se realizará dentro de 2 años 6 meses, lo que significa 10 trimestres.

Una vez que se obtiene la gráfica donde se deben ubicar cada una de las deudas, se determina la posición de la fecha focal.

La fecha focal es la que se toma como referencia para realizar los cálculos de una serie de valores en el tiempo, por lo general suele ser la fecha de pago desconocida.

Se determina una fecha focal, a la cual se traslada casa una de las deuda y los pagos, ya que no se puede sumar diferentes valores en distintos momentos del tiempo; para poderlos sumar tienen que estar ubicados en el mismo momento en el tiempo

Se señala en la gráfica a dirección en la que hay que trasladar el dinero hasta la fecha focal, lo cual nos indica si hay que adelantarlo en el tiempo (encontrar valor futuro), o retrocederlo (encontrar valor actual).



Cuando la flecha apunta hacia el lado derecho, indica que es un valor que se debe trasladar a futuro, mientras que si se dirige al lado izquierdo, significa que debe retroceder el dinero en tiempo, es decir trasladarlo a valor presente.

Paso 3:

Se trasladan las deudas y los pagos a la fecha focal, considerando que la tasa de interés que se utilizará para todas las deudas y los pagos es la misma **(en este caso, la de nueva negociación)**, sin perder de vista que valor futuro es monto y valor actual es capital.

- La primera deuda se traslada de valor actual a valor futuro:

C= $4 400

t= 10 **se pueden contar en la gráfica, entre la deuda y el pago**

$$M = C(1 + it)$$

$$M = 4400[1 + 0.06(10)] = 4400(1.6) = 7040$$

- La segunda deuda, de acuerdo con la gráfica, debe trasladarse de valor actual a valor futuro, para lo cual tenemos:

C=$19 600

t= 3 **ya que en la gráfica se pueden contar tres periodos entre su fecha de vencimiento y la fecha focal**

$$M = C(1 + it)$$

$$M = 19600[1 + 0.06(3)] = 19600(1.18) = 23\ 128$$

- La tercera deuda, como se observa en la gráfica, hay que trasladarla de valor futuro a valor presente, para lo cual tenemos:

M=$5 000

t= 4 **como se puede observar en la gráfica**

$$M = C(1 + it)$$

$$5000 = C[1 + 0.06(4)]$$

$$C = \frac{5000}{1 + (0.06)(4)} = \frac{5000}{1.025} = 4,032.26$$

- El primer pago, de acuerdo con la gráfica, debe trasladarse de valor actual a valor futuro:

C=$10 000

t= 8 **como se observa en la gráfica**

$$\boldsymbol{M = C(1 + it)}$$

$$\boldsymbol{M = 10\,000[1 + 0.06(8)] = 10\,000(1.48) = 14\,800}$$

<u>Paso 4:</u>

Se plantea la ecuación de valor.

De acuerdo con la definición de ecuación que se vio en las primeras unidades, tenemos que una ecuación es una igualdad que se hace verdadera para algún (os) valor (es) de la incógnita

En este caso entenderemos como ecuación de valor a una igualdad entre la suma de las deudas y la suma de los pagos, donde se desconocen uno o más de ellos, considerando como referencia para la igualdad la fecha focal.

$$\sum deudas = \sum pagos$$

Fórmula de la ecuación de valor

Donde Σ representa suma

7040 + 23 128+ 4 032.26= 14 800 + x

<u>Paso 5:</u>

Se resuelve la ecuación para encontrar el valor del pago que falta:

$7040 + 23\ 128 + 4\ 032.26 = 14\ 800 + x$

$34\ 200.26 = 14\ 800 + x$

$X + 14\ 800 = 24\ 200.26$

$X = 34\ 200.26 - 14\ 800 = 19\ 400.26$

Significa que el segundo pago deberá ser de $19 400.26

INTERÉS COMPUESTO

En al unidad anterior se analizó cómo se obtiene el interés simple, el cual se calcula sobre una base constante de capital, pero ¿qué ocurre con cuentas bancarias que se mantienen durante años, como los fideicomisos, en donde no se retiran los intereses, sino se reinvierten?

A lo largo de esta unidad revisaremos, es decir, forman parte del nuevo capital para el segundo periodo de inversión y así sucesivamente.

También se revisará la diferencia entre valor presente y monto, se analizará cómo es que varias tasas de interés diferentes generan la misma cantidad de interés en el mismo tiempo y definiremos qué son la tasa nominal y la tasa efectiva.

Anterior mente se mencionó que el interés simple es la cantidad que se paga por el uso del dinero, y que los tres factores que hay que considerar para su cálculo son **capital, tiempo y tasa de interés.**

Como sabemos, en el interés simple el capital permanece invariable, al igual que el interés generado en cada intervalo unitario.

Supongamos que el interés generado en cada periodo unitario se suma al capital y juntos se conviertes en el nuevo capital para el siguiente periodo, entonces decimos que el interés se **capitaliza periódicamente,** como podemos observarlo en la siguiente tabla:

Capital inicial de $10 000.00

Tasa de interés del 15% anual

AÑO	INTERÉS SIMPLE		INTERÉS CON CAPITALIZACIONES	
	Capital ($)	**Interés ($)**	**Capital ($)**	**Interés ($)**
1	10 000	1 500	10 000	1 500
2	10 000	1 500	11 500	1 725
3	10 000	1 500	13 225	1 983.75
4	10 000	1 500	15 208.75	2 281.31
5	10 000	1 500	17 490.06	2 623.51
6	10 000	1 500	20 113.57	3 017.04
7	10 000	1 500	23 130.61	3 469.60
8	10 000	1 500	26 600.21	3 990.03
9	10 000	1 500	30 590.24	4 588.57

10	10 000	1 500	35 178.81	5 276.82
1	**Total de interés $15 000**		**Total de interés $ 30 455.93**	

Como se puede observar, se obtiene mucho mayor rendimiento en el caso donde el interés se capitaliza en comparación con el interés simple, debido a que en cada periodo el capital que genera interés aumenta, lo que no ocurre en el interés simple; a esta forma de generar interés, cuando capitalizamos los intereses en cada periodo, se le conoce como interés simple.

El interés compuesto es aquel que al final de cada periodo se agrega al capital, es decir, se capitaliza, lo que significa que el capital aumenta por la adición de los intereses vencidos al final de cada uno de los periodos a que se refiere la tasa

Monto compuesto y valor presente

Anteriormente se vio, que cuando se suman el capital y los intereses generados se obtiene una cantidad llama **monto** o **valor futuro.**

Cuando el interés se capitaliza más de una vez por año, el tiempo de tasa anual recibe el nombre de **tasa nominal**, y lo representamos con la letra "**j"**

Ejemplo:

Una tasa anual del 20% donde el interés se capitaliza cada mes se expresa como:

- 20% anual capitalizable mensualmente; ó
- 20% anual convertible mensual; ó
- 20% compuesto mensualmente, ó
- 20% compuesto mensual

NOTA:

Una forma de identificar si se trata de un ejercicio de interés simple o compuesto es que dentro de la redacción del interés compuesto siempre llevara la palabra (capitalizable ó convertible, ó compuesto, ó compuesta) en cambio el interés simple solo dirá simple anual , mensual cuatrimestral etc.

Siendo cualquiera de las formas anteriores la utilizada de forma común por instituciones bancarias y financieras.

Como ya se mencionó, al hablar de una tasa nominal nos referimos a una tasa anual, que se capitaliza cada determinado tiempo durante el año.

Al número de capitalizaciones que se realizan por año lo identificaremos con la letra **"k"** y se utiliza para obtener la tasa por periodo de capitalización.

Por ejemplo, para una tasa de interés capitalizable bimestralmente tendríamos que:

K= 6, **ya que un año tiene 6 bimestres**

Otro ejemplo si la tasa fuera compuesto trimestralmente:

K= 4, ya que un año tiene 4 trimestres

La tasa de interés es uno de los factores principales para el cálculo del interés. En el caso del interés compuesto y para efecto de cálculos no se considera a la tasa nominal en forma directa; es necesario transformarla a **tasa por periodo de capitalización**, la cual identificaremos por la letra **"i".** Ésta se obtiene dividiendo la tasa nominal entre el número de capitalizaciones por año.

$$i = \frac{j}{k}$$

Donde:

i=tasa por periodo de capitalización

k= tasa por periodo de capitalización en un año

j= tasa de interés

Esto es, si se tiene una tasa del 24% anual compuesta mensual, no significa que se va a generar el 24% mensual cada mes, en realidad va a generar $\frac{24\%}{12} = 2\%$ cada mes, que acumulado durante 12 meses es de 24%.

La fórmula para calcular el interés compuesto será:

$$M = C(1 + i)^n$$

M= monto

C= capital

$$i = \frac{j}{k}$$

n= es el número total de periodos de inversión

El número total de periodos de inversión (n), se obtiene convirtiendo el tiempo que dura dicha inversión a las mismas unidades en que está dada la tasa nominal, mediante una regla de tres:

Ejemplo:

Calcular el número total de periodos de inversión de una cuenta a 18 meses con una tasa de interés del 25% anual capitalizable trimestralmente.

Solución:

Como la tasa nominal está expresada en trimestres, para encontrar el número de periodos que dura la inversión hay que transformar los 18 meses a trimestres, lo cual se logra mediante una regla de tres:

1 trimestre---------- 3 meses

X trimestres--------- 18 meses

$$x = \frac{18(1)}{3} = 6\ trimestres$$

Significa que n=6 trimestres, es decir, la inversión dura 6 trimestres.

Hasta el momento se ha el revisado por separa cómo obtener cada uno de los factores necesarios para calcular el monto, ahora veremos cómo es que realmente se calcula éste:

Ejemplo:

¿En cuanto se convertirán $15 000.00 que se invierten por 18 meses en una cuenta que paga el 24% anual capitalizable bimestralmente?

Solución

Ya que el problema es en cuánto se convertirán, vemos que se pide la cantidad total, es decir, la inversión más los intereses, lo que en realidad es el momento.

Primero se obtienen lo datos:

C= $15 000.00

j= 24% = 0.24 anual capitalizable bimestralmente

n= 18 meses= $\frac{18}{2} = 9$ bimestres, ya que en 18 meses hay nueve bimestres.

$$i = \frac{j}{k} = \frac{0.24}{6} = 0.04$$

Sustituimos en

$$M = 15000(1 + 0.04)^9 = 15000(1.42333) = 21\,239.68$$

El monto final es de $21 349.68

Como recordarás, ya se hablo del valor del dinero en el tiempo, se mencionó que el monto es considerado un valor futuro; de forma análoga el capital o cantidad inicial también es llamado valor actual o valor presente.

En ocasiones se desea conocer el valor presente de cierto monto, considerando que el valor presente es el capital, éste se puede despejar de la fórmula para el cálculo del monto:

$$M = C(1 + i)^n$$

$C = \frac{M}{(1+i)^n}$ **Fórmula para obtener el valor actual de un monto compuesto.**

De igual manera como ocurre en el interés simple, en ocasiones se requiere calcular el capital, la tasa de interés o el tiempo de una inversión. Para estos casos es necesario despejar, de la fórmula para el cálculo del monto, la variable que se requiera.

Ejemplo:

¿Cuál es el valor actual de $4 000.00 a pagar dentro de cuatro años, si la tasa nominal es del 4% anual capitalizable semestralmente?

Solución:

Identificamos los datos:

M= $4000.00

$$i = \frac{j}{k} = \frac{0.04}{2} = 0.02$$

n= 4 años= 2(4)= 8 semestres

Se sustituye en la fórmula el valor actual:

$$C = \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$C = \frac{4000}{(1+0.02)^8} = \frac{4000}{1.1717} = 3413.96$$

Aproximación de la tasa de interés y el tiempo

Imagina que eres empresario que requiere reunir cierta cantidad de dinero dentro de determinado tiempo y sólo cuentas con un capital mucho menor que la cantidad que necesitas. ¿Cuál es la tasa a la que requieres invertir?

Ahora supón que quieres comprar un auto último modelo que tiene un costo de $184 000.00 y únicamente cuentas con $112000.00. Ya investigaste y el rendimiento mayor que te ofrecen los bancos es del 23% anual compuesto mensualmente. ¿En cuánto tiempo podrás comprar un auto?

Estas situaciones se presentan con frecuencia en la vida real, e incluso pueden ser más complejas, por lo que es necesario calcular el tiempo o la tasa de interés, lo cual se logra despejándolos de la formula para el cálculo del monto compuesto.

$$M = C(1 + i)^n$$

Ejemplos

¿Cuántos años se requieren para que un capital se duplique, si se ivierte a una tasa del 18% anual compuesto trimestralmente?

Solución:

Se identifican los datos:

M= 2C

$$i = \frac{j}{k} = \frac{0.18}{4} = 0.045$$

Se sustituye en la fórmula para el cálculo del monto

$$M = C(1 + i)^n$$

$$2C = C(1 + 0.045)^n$$

Se despeja n de la ecuación:

$$(1 + 0.045)^n = \frac{2C}{C}$$

$$(1 + 0.045)^n = 2$$

Cuando una incógnita es un exponente se utiliza la siguiente propiedad de los logaritmos para poder despejarla, $\log a^n = n \log a$.

Aplicamos logaritmos en ambos lados de la igualdad:

$$log(1.045)^n = log\ 2$$

Aplicando la propiedad de los logaritmos

n log 1.045 = log 2

$$n = \frac{\log 2}{\log 1.045} = \frac{0.3010}{0.0191} = 15.75\ trimestres$$

Cuando el resultado está dado en trimestres debido a que la tasa es capitalizable de forma trimestral, pero como nos piden el resultado en años se aplica una regla de tres:

1 año------ 4 trimestres

X años---- 15.75 trimestres

$$x = \frac{15.75\ (1)}{4} = 3.93\ años$$

Significa 3.93 años

Ejemplo:

¿Cuál es la tasa anual compuesta semestralmente en la que se invirtieron $80,000.00 que después de tres años se transformaron en $125 000.00?

Solución

k= 2, puesto que hay dos semestres en el año

C= $80 000.00

M=$125 000.00

N= 3 años = 3(2)= 6 semestres

Sustituimos en la fórmula para calcular el monto:

$M = C(1+i)^n$

125 000= $(1+i)^6$

Despejamos i=

$$(1+i)^6 = \frac{125\ 000}{80\ 000}$$

$$(1+i)^6 = \sqrt[6]{1.5625}$$

i= 1.0772 – 1

i= 0.0772

Recuerda que la i que se acaba de obtener representa la tasa por periodo de capitalización, y lo que se requiere es la tasa nominal, la cual puede despejarse de la fórmula:

$$i = \frac{j}{k}$$

$$0.0772 = \frac{j}{2}$$

j= (0.0772)(2)= 0.1544= 15.44%

La tas nominal anual compuesta semestralmente es de 15.44%

Tasa nominal y tasa efectiva

Para comprender la definición y la diferencia de tasa nominal y tasa efectiva, analicemos la siguiente situación que se presenta de manera ordinaria.

Piensa que inviertes $1500 a una tasa del 18% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuál es el interés que ganarías al cabo de un año?

C= 1 500

i= 0.18/12=0.015

n= 1(12)= 12 meses

$$\boldsymbol{M = 1500(1 + 0.015)^{12} = 1500\ (1.1956) = 1\ 793.43}$$

I= 1793.43 – 1 500= 293.43

El interés generado al cabo de un año es $293.43

Ahora bien, si consideramos este interés como un interés simple, la tasa que éste representa sería:

I= Cit

t= 1 año

C= 1 500

I= 293.43

293.43 = 1 500 (1) (i)

$$i = \frac{293.43}{1500(1)} = 0.19562$$

Significa que en realidad se gana el 19.56%. Si comparamos esta tasa con la que **se inicialmente en el problema, se puede observar que:**

18%: en menor que 19.56%

La tasa de interés considerada simple es mayor que la tasa de interés compuesto, lo que significa que en realidad se está ganando el 19.56% al año.

A esta tasa se le conoce como **tasa efectiva.**

La **tasa efectiva** es la tasa de interés simple que producirá la misma cantidad acumulada de interés en un año que la tasa nominal. También la podemos definir como aquella en la que efectivamente está invirtiendo un capital, a una tasa anual con más de un periodo de capitalización por año. Se representa con la letra i

Tasa nominal es la tasa anual con más de una capitalización por año, que rige una operación financiera

Para encontrar la tasa nominal y la tasa efectiva se tiene:

$$i = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k} - 1$$

j= tasa nominal

i= tasa efectiva anual

k= número de capitalizaciones por año

Ejemplo

Utilizando la fórmula anterior, comprobar que una tasa nominal del 18% anual convertible mensualmente corresponde a una tasa efectiva del 19.56%

Solución

j= 0.18

k= 12

$$i = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k} - 1 =$$

$$i = \left(1 + \frac{0.18}{12}\right)^{12} - 1 = 1.1956 - 1 = 0.1956$$

Ejemplo

¿Cuál es la tasa nominal anual capitalizable trimestralmente equivalente a una tasa efectiva del 32%?

Solución:

i= 32% = 0.32

k= 4 debido a que la tasa nominal es capitalizable trimestralmente.

A continuación se enumerarán los despejes para llegar a j

2

$$i = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k} - 1 =$$

1

4

3

$$0.32 = \left(1 + \frac{j}{4}\right)^4 - 1 =$$

$$0.32 + 1 = \left(1 + \frac{j}{4}\right)^4$$

$$1.32 = \left(1 + \frac{j}{4}\right)^4$$

Raíz cuarta con potencia cuarta se elimina

$$\sqrt[4]{1.32} = \sqrt[\cancel{4}]{\left(1 + \frac{j}{4}\right)^{\cancel{4}}}$$

1.07187 = $1 + \frac{j}{4}$

1.07187 – 1= 0.07187

0.07187 (4)= 0.2874

0.2874 (100%) = 28.74%

Para llegar hasta j que es la tasa nominal se aplica raíz cuarta a ambos lados para eliminar la potencia

Para eliminar la potencia se debe aplicar raíz enésima a ambos lados, por que raíz enésima por que dependerá el grado de la potencia, si tiene potencia 5 se aplicará raíz quinta y así sucesivamente.

<u>Tasas equivalentes</u>

¿Existirán dos tassa nominales equivalentes que produzcan la misma cantidad de interés en un año?

La respuesta es sí existen tasa nominales diferentes y con periodo de capitalización distintos que producen igual cantidad de interés en el mismo periodo. A este tipo de tasas de interés se les conoce como **tasas equivalentes**

Ejemplo

¿Cuál es el monto de una inversión de $1 000.00 durante un año, con una tasa del 14% anual convertible trimestralmente?

C= $1 000.00

$$i = \frac{0.14}{4} = 0.035\ trimestral$$

n= 1 año = 1(14) trimestres

Se sustituye en la formula para el monto compuesto:

$$\boldsymbol{M = 1000(1 + 0.035)^4}$$

$$\boldsymbol{M = 1000(1.035)^4}$$

$$\boldsymbol{M = 1000(1.1475)}$$

M= 1 147.52

Considera la misma inversión, durante el mismo año, pero ahora la tasa es del 13.84% anula compuesto mensualmente

C= 1000

$$i = \frac{0.1384}{12} = 00.0115\ mensual$$

n= 1 año = 1(12) meses

Se sustituye en la formula para el monto compuesto:

$$\boldsymbol{M = 1000(1 + 0.0115)^{12}}$$

$$M = 1000(1.0115)^{12}$$

$$M = 1000(1.1475)$$

M= 1 147.52

Si ambos resultados calculamos ya directamente el monto y tenemos que:

Para la tasa del 14% anual compuesto trimestral:

M= $1 147.52

Para la tasa del 13.84% anual compuesto mensual:

M= $ 1 147.52

Como puedes observar el monto en ambos casos es el mismo, y como el capital inicial es el mismo, podemos deducir que el interés generado en las dos cuentas es igual.

Dos tasas nominales con diferentes periodos de capitalización y que al cabo de un año producen el mismo interés, se denominan tasas equivalentes

Para encontrar una tasa nominal equivalente a otra con diferentes periodos de capitalización, partimos de que el monto producido por ambas en un año es el mismo:

$$M_1 = M_2$$

Fórmula para despejar la tasa equivalente

$$\left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k} = \left(1 + \frac{j'}{k'}\right)^{k'}$$

Donde:

j= tasa nominal conocida

k= número de capitalizaciones por año de la tasa conocida

j´= tasa nominal equivalente (desconocida)

k´= número de capitalizaciones por año de la tasa equivalente (desconocida)

Ejemplo:

¿Cuál es la tasa nominal compuesta mensualmente, que es equivalente a una tasa del 24% anual compuesto semestralmente?

Solución

j= 24% = 0.24 anual compuesta semestral

k= 2 debido a que hay dos semestres por año

k´= 12 debido a que la tasa equivalente (desconocida) es compuesta mensualmente y un año tiene 12 meses

Se sustituyen los datos en la fórmula

$$\left(1+\frac{j}{k}\right)^{k} = \left(1+\frac{j'}{k'}\right)^{k'}$$

y se despeja a **j´**

$$\left(1+\frac{0.24}{2}\right)^{2} = \left(1+\frac{j'}{12}\right)^{12}$$

$$1.2544 = \left(1+\frac{j'}{12}\right)^{12}$$

$$\sqrt[12]{1.2544} = \sqrt[\cancel{12}]{\left(1+\frac{j'}{12}\right)^{12}}$$

1.01906= $1+\frac{j'}{12}$

1.01906 – 1=$\frac{j'}{12}$

0.01906 = $\frac{j'}{12}$

0.o1906 (12)

=0.2288 (100%) 22.88%

La tasa de interés equivalente al 24% anual compuesto semestralmente es del 22.88% anual compuesto mensual.